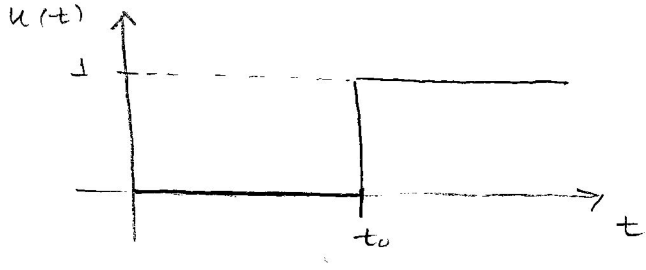
Preparaduría #7 - Funciones Singulares

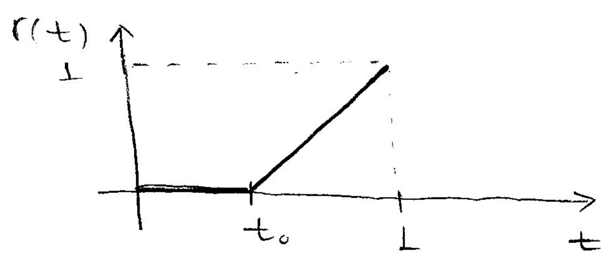
Funciones Singulares

* **Escalón unitario**: es una señal que es cero para tiempos menores a "t_0" y 1 para tiempos mayores a "t_0". Se representa así:



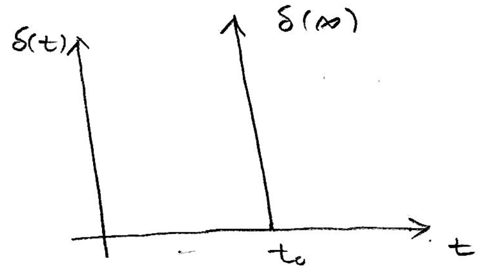
$$u(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases}$$

* **Rampa**: es una señal que aumenta linealmente conforme avanza el tiempo. Vale "t" para tiempos mayores a "t_0" y vale cero para tiempos menores a "t_0". Se representa así:



$$r(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ t - t_0, & t > t_0 \end{cases}$$

* **Impulso:** el impulso unitario es cero en todo t excepto en "t_0", donde está indefinido.



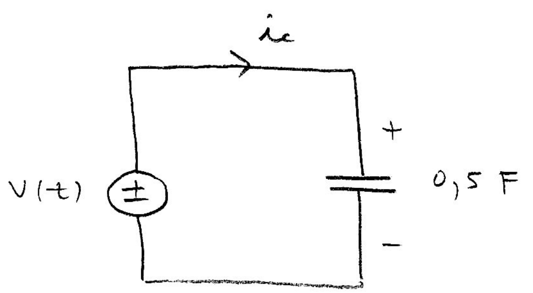
$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ \text{ind.}, & t = t_0 \\ 0, & t > t_0 \end{cases}$$

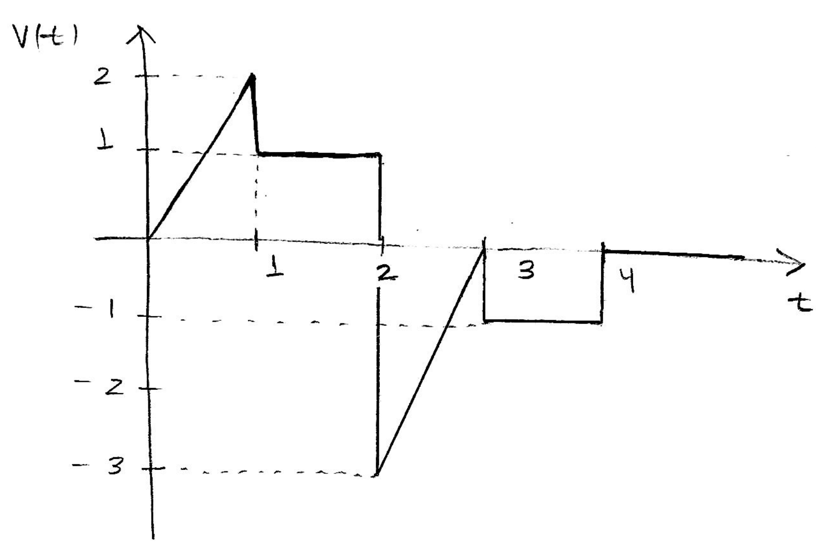
Una relación importante es:

$$\underset{\text{"}t\text{"}}{r(t)} \underset{\text{int}}{\overset{\text{deriv}}{\rightleftarrows}} \underset{\text{"}1\text{"}}{u(t)} \underset{\text{int}}{\overset{\text{deriv}}{\rightleftarrows}} \underset{\text{"}0\text{"}}{\delta(t)}$$

Ejercicio #1)

En el siguiente circuito halle el valor de la corriente $i_c(t)$ si la fuente $V(t)$ está expresada en la gráfica. Exprese el resultado de forma gráfica y analítica.





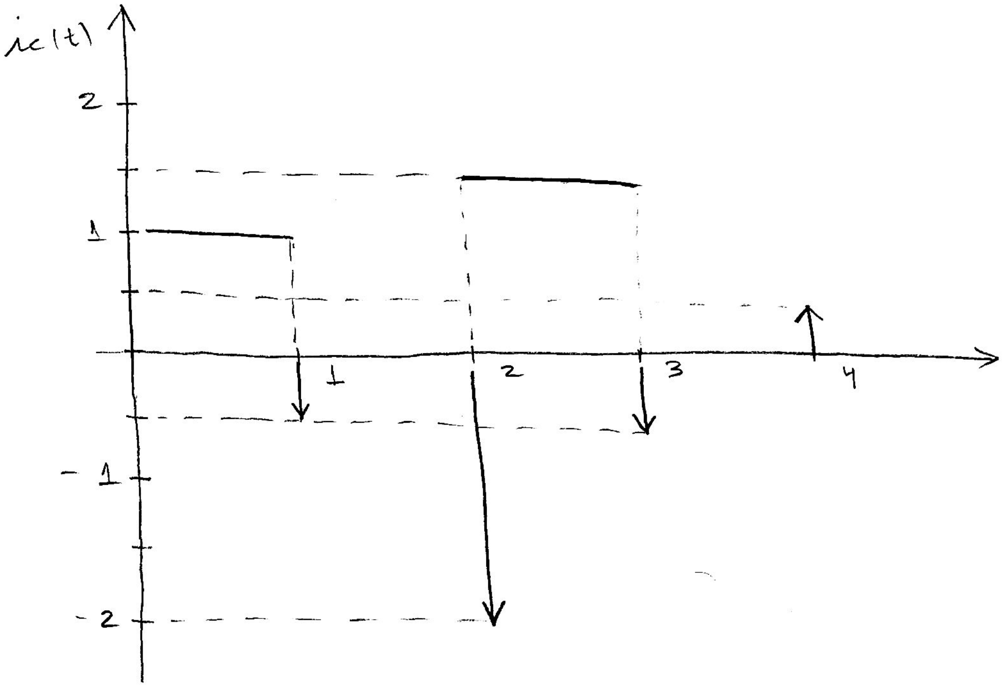
Para hacer este tipo de ejercicios hay que comprender que las señales son sumas y restas de funciones singulares.

la fuente es:

$$v_c(t) = 2r(t) - 2r(t-1) - u(t-1) - 4u(t-2) + 3r(t-2) - 3r(t-3) - u(t-3) + u(t+4)$$

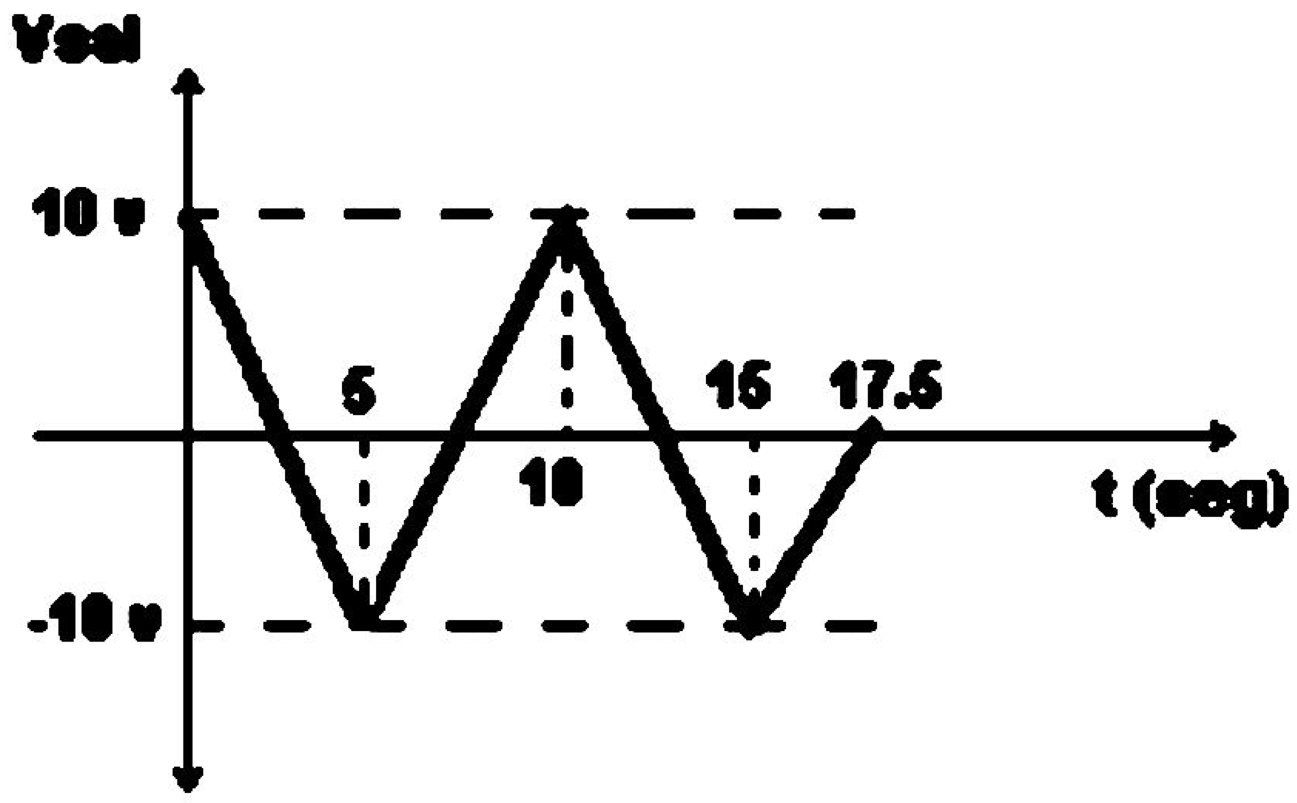
Recordamos que $i_c(t) = c\,\dfrac{dv_c(t)}{dt}$,

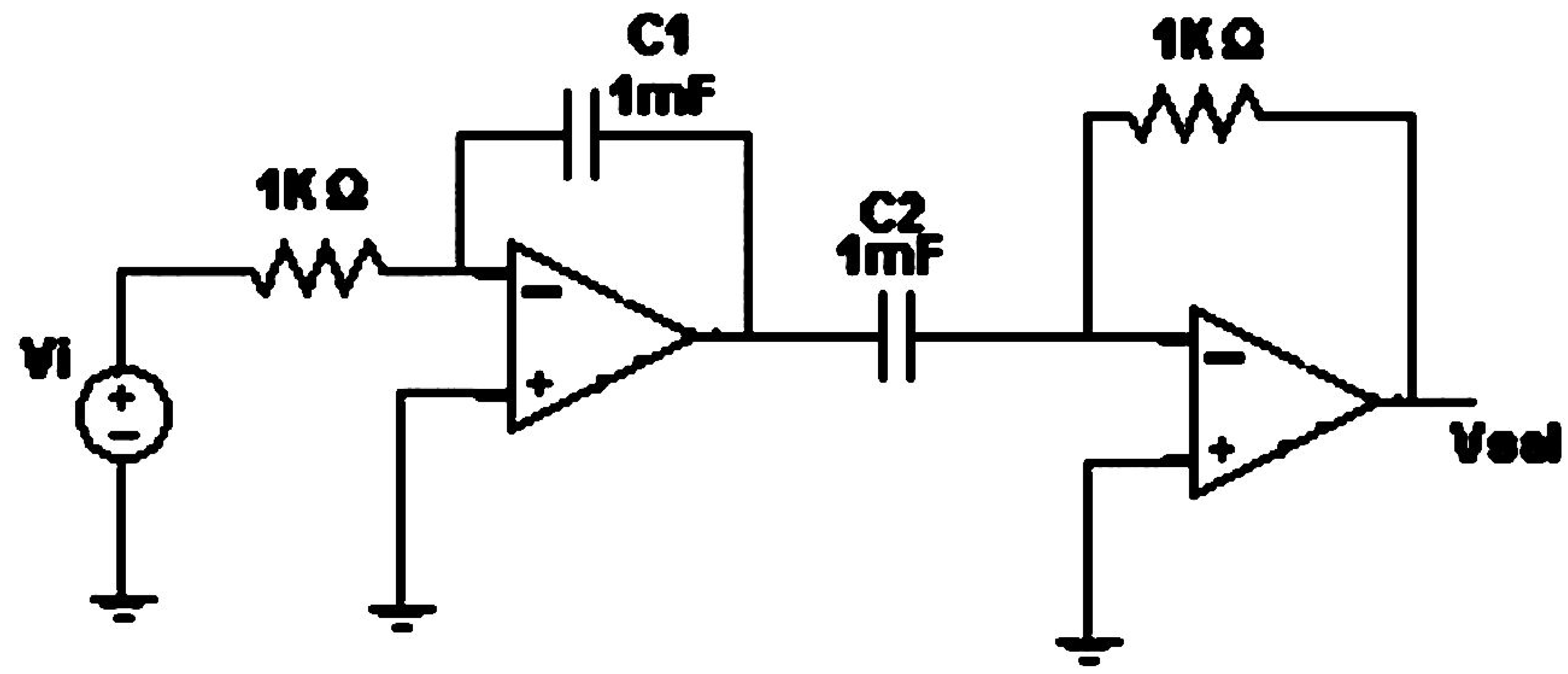
$$i_c(t) = u(t) - u(t-1) - \frac{\delta}{2}(t-1) - 2\,\delta(t-2) + \frac{3}{2}u(t-2) - \frac{3}{2}u(t-3) - \frac{\delta}{2}(t-3) + \frac{\delta}{2}(t-4)$$



Ejercicio #2)

Si el voltaje de salida del circuito esta dado por la siguiente gráfica: Hallar gráfica y analíticamente el voltaje de entrada (Vi) y la corriente por el condensador C2.





Solución:

$$V_{sal} = 10u(t) - 4r(t) + 4r(t-5) + 4r(t-5) - 4r(t-10) - 4r(t-10) + 4r(t-15) + 4r(t-15) - 4r(t-17{,}5)$$

Nodo 1

$$\frac{\cancel{V_1^{0}} - V_i}{1K} + i_{c_1} = 0 \longrightarrow \frac{V_i}{1K} = i_{c_1}$$

Nodo 4

$$\frac{\cancel{V_4^{0}} - V_{sal}}{1K} - i_{c_2} = 0 \longrightarrow i_{c_2} = -\frac{V_{sal}}{1K}$$

$*\ i_{c_1} = C_1 \dfrac{dV_{c_1}}{dt}$; $\cancel{V_1^{0}} - V_3 = V_{c_1} \longrightarrow \boxed{V_{c_1} = -V_3}$

$*\ i_{c_2} = C_2 \dfrac{dV_{c_2}}{dt}$

$$V_3 - \cancel{V_4^{0}} = V_{c_2} \longrightarrow \boxed{V_{c_2} = V_3}$$

$$V_{c1} = -V_{c2}$$

$$V'_{c1} = -V'_{c2}$$

$$C_1 V'_{c1} \neq -C_2 V'_{c2}$$

Pero $C_1 = C_2 = C = 1mF$

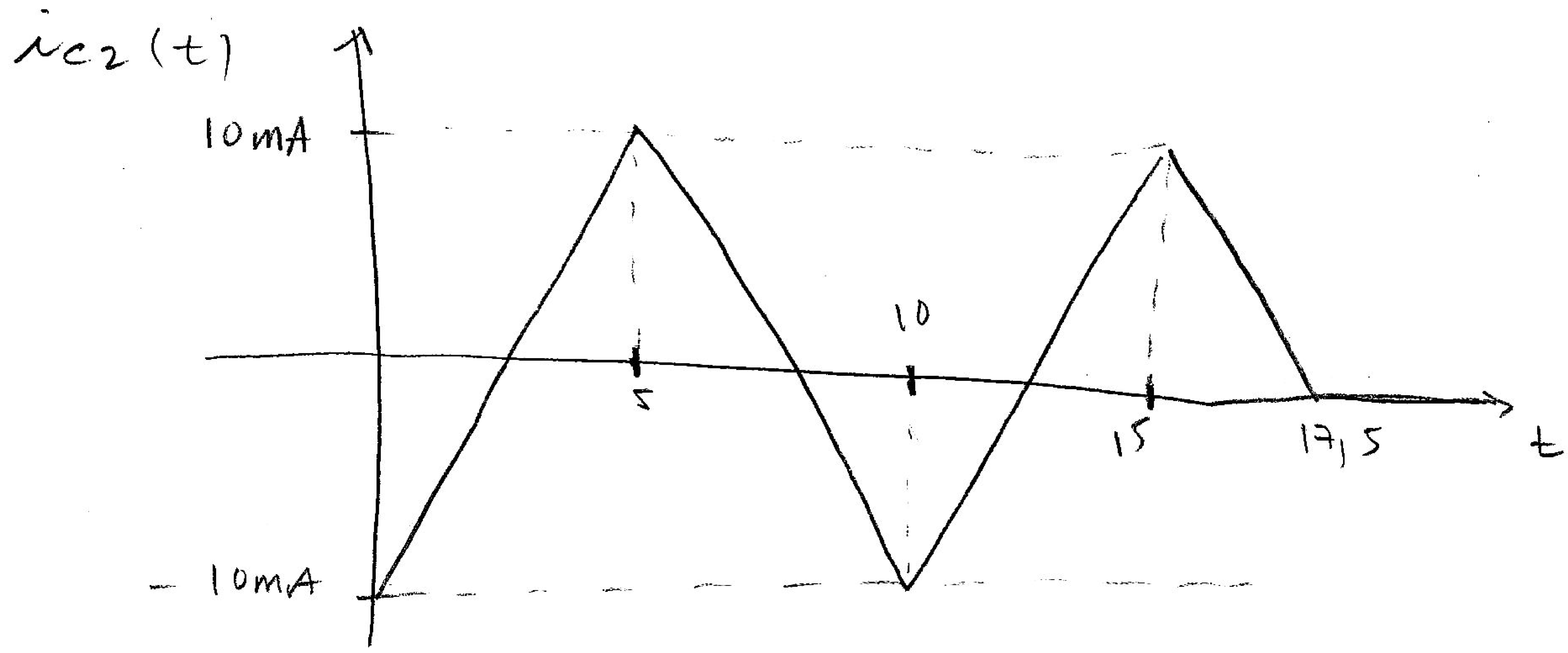
$$i_{c1} = -i_{c2}$$

$$\frac{V_i}{1K} = -\left(-\frac{V_{sal}}{1K}\right)$$

$$\boxed{V_i = V_{sal}}$$

$$V_i = 10u(t) - 4r(t) + 8r(t-5) - 8r(t-10) + 8r(t-15) - 4r(t-17{,}5)$$

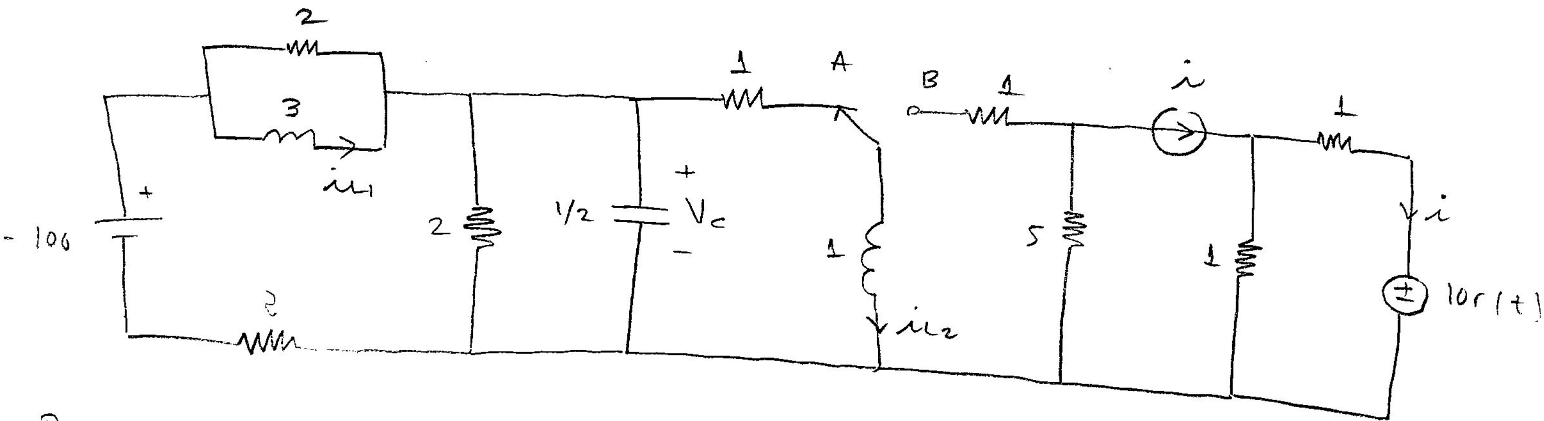
$$i_{c2} = -\frac{V_{sal}}{1K} = -\frac{1}{1K}\left[10u(t) - 4r(t) + 8r(t-5) - 8r(t-10) + 8r(t-15) - 4r(t-17{,}5)\right]$$



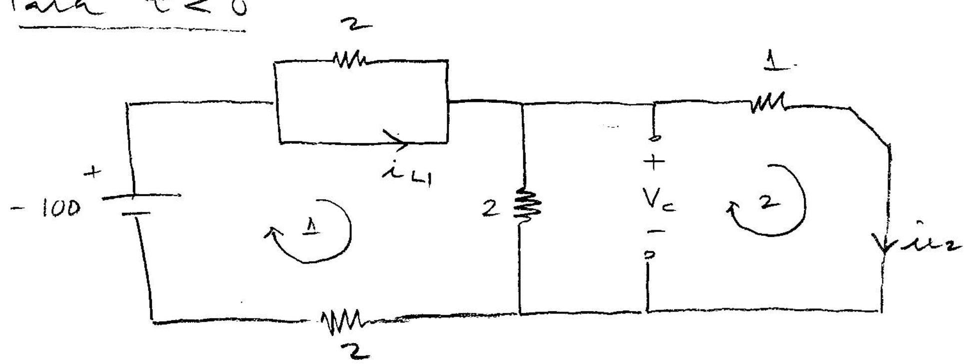
Ejercicio # 3) En el siguiente circuito el interruptor ha permanecido mucho tiempo en la posición A, en el instante $t = 0$ seg. pasa a la posición B.

a) Hallar $i_{L1}(0^-)$, $i_{L2}(0^-)$ y $V_c(0^-)$.

b) Halle $i_{L2}(t)$ para $t > 0$.



Para $t < 0$



Malla 1

$$100 + 0 + 4i_1 - 2i_2 = 0 \rightarrow \boxed{i_2 = 2i_1 + 50}$$

Malla 2

$$2i_2 - 2i_1 + i_2 = 0$$

$$3i_2 - 2i_1 = 0$$

$$3(2i_1 + 50) = 0 \longrightarrow 6i_1 + 150 - 2i_1 = 0$$

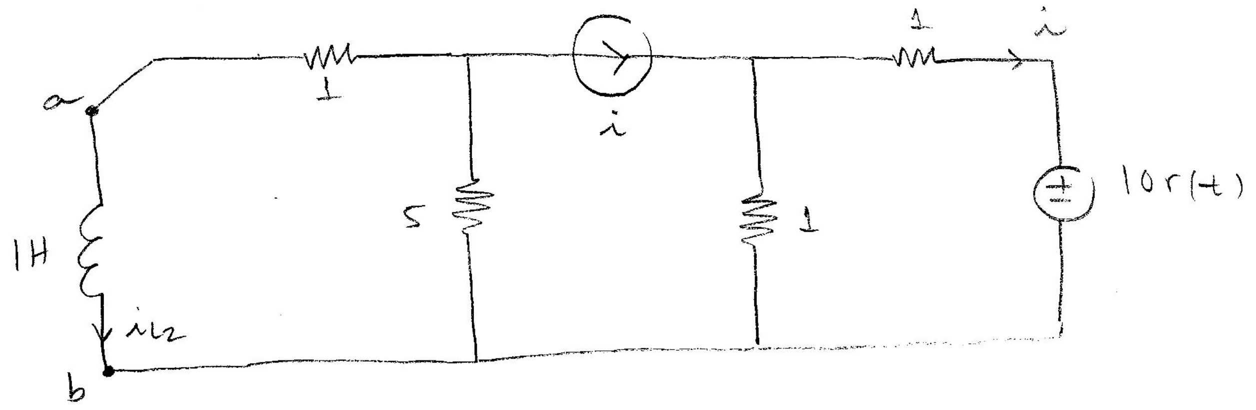
$$\longrightarrow 4i_1 = -150$$

$$\boxed{i_1 = -\frac{150}{4} = -37,5}$$

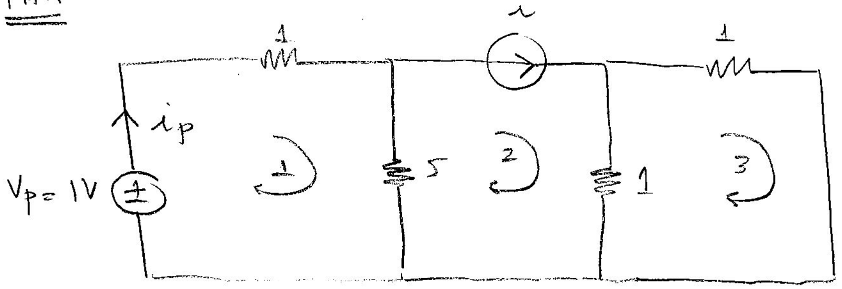
$$\longrightarrow \boxed{i_2 = -75 + 50 = -25\ \text{A}} \quad \text{y} \quad \boxed{V_c = -25\ \text{V}}$$

Para $t > 0$

* $i_{L2}(0^-) = i_{L2}(0^+) = -25\,A$



Rth



Malla 1

$-1 + i_1 + 5i_1 - 5i_2 = 0$

$-1 + 6i_1 - 5i_2 = 0$

Malla 2

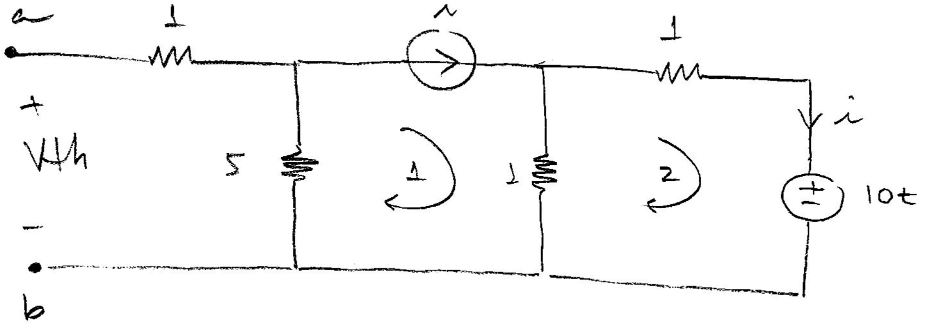
* $i_2 = i_3 = i$
* $-1 + 6i_1 - 5i_2 = 0 \longrightarrow \boxed{i_1 = \frac{5}{6}i + \frac{1}{6}}$

Malla 3

$i_3 - \overset{0}{i_2} + i_3 = 0 \longrightarrow \boxed{i_3 = 0}$

$\boxed{i_p = i_1 = \frac{1}{6}}$; $\boxed{R_{th} = \frac{V_p}{I_p} = 6\,\Omega}$

$\underline{\underline{V_{th}}}$



Malla 1

$\boxed{i_1 = i}$

Malla 2

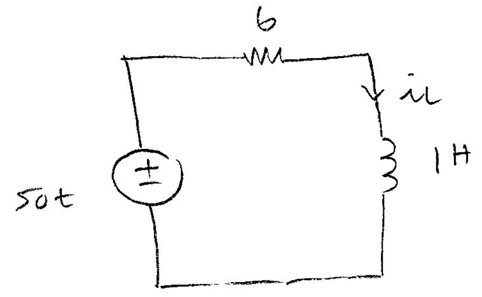
$$i_2 - i_1 + i_2 + 10t = 0$$

$$2i_2 - i_1 + 10t = 0$$

$$2i - i + 10t = 0$$

$$\boxed{i = -10t}$$

$$\boxed{V_{th} = -5i_1 = 50t}$$



LKV

$$-50t + 6i_L + V_L = 0$$

$$-50t + 6i_L + L\frac{di_L}{dt} = 0$$

$$\underbrace{\frac{di_L}{dt} + 6i_L = 50t}_{\text{ec. dif. lineal.}}$$

$$* \quad \mu = e^{\int 6t} = e^{6t}$$

$$\rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[e^{6t} \cdot i_L\right] = 50t\, e^{6t}$$

$$e^{6t} \cdot i_L = \frac{25}{18} \cdot e^{6t} \left(6t - 1 \right) + C_1$$

$$i_L = \frac{25}{18} \left(6t - 1 \right) + \frac{C_1}{e^{6t}}$$

* $i_L(0) = -\frac{25}{18} + C_1 = -25$

$$\boxed{C_1 = -\frac{425}{18}}$$

* $i_L = \frac{25}{18} \left(6t - 1 \right) - \frac{425}{18 e^{6t}}$

$$i_L = \frac{150}{18} t - \frac{25}{18} - \frac{425}{18 e^{6t}}$$

$$\boxed{i_L = \frac{1}{18} \left(150t - 25 - 425 e^{-6t} \right) \text{ A} \quad \text{para } t > 0}$$